

Tomasz PISULA*

OCENA EFEKTYWNOŚCI FUNKCJONOWANIA PEWNEGO SYSTEMU CYBERNETYCZNO-EKONOMICZNEGO TYPU „TRANSPORT–ZAPASY”

Przedstawiono ocenę efektywności funkcjonowania pewnego systemu cybernetyczno-ekonomicznego typu „transport–zasoby” z awaryjnym układem transportowym. Za miarę efektywności funkcjonowania systemu (w aspekcie ekonomicznym) przyjęto tzw. funkcję strat. Na podstawie szczegółowej analizy funkcji strat dla różnych wariantów funkcjonowania systemu uzyskano szereg wniosków o istotnym znaczeniu praktycznym, które umożliwiają takie sterowanie systemem (poprzez odpowiedni dobór jego parametrów), aby funkcjonował on jak najbardziej efektywnie.

1. Wstęp

Poruszana w artykule problematyka jest ściśle związana z tzw. teorią gromadzenia zasobów (*theory of storage*), która zaczęła się bardzo szybko rozwijać począwszy od lat trzydziestych ubiegłego stulecia, czyli od opublikowania klasycznego modelu: *Economic Order Quantity* – Wilsona [1]. Dalszy dynamiczny rozwój tej dziedziny nauki nastąpił w latach pięćdziesiątych mijającego stulecia, lecz tym razem z punktu widzenia zastosowań w niej metod probabilistycznych (pierwsze prace Morana [2] dotyczące systemów zbiorników wodnych).

W teorii gromadzenia zasobów rozpatruje się różnego rodzaju matematyczne modele systemów gromadzenia zasobów. Najbardziej ogólnie modele te można sklasyfikować według dwóch kryteriów:

- Pierwsze kryterium dotyczy sposobu interpretacji czasu w modelach. Z punktu widzenia tego kryterium w literaturze rozważa się systemy w czasie „ciągłym” oraz systemy w czasie „dyskretnym”.

* Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza, 35-959 Rzeszów, ul. W. Pola 2.

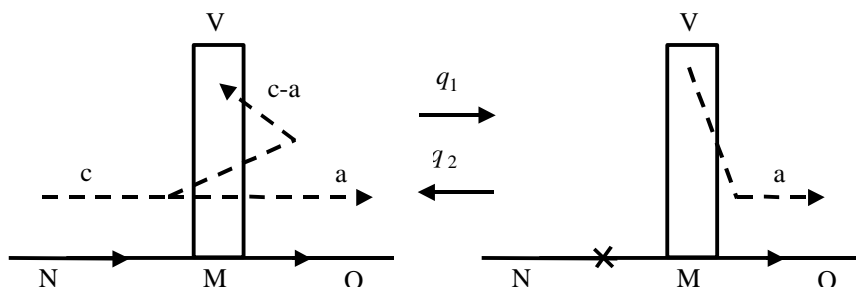
• Drugie kryterium dotyczy sposobu zmiany poziomu zapasów. Biorąc pod uwagę to drugie kryterium, w literaturze rozpatruje się systemy, w których poziom zapasów zmienia się w sposób „ciągły” oraz systemy ze „skokową” zmianą poziomu zapasów.

Modele systemów, w których poziom zapasów zmienia się w sposób skokowy obejmują tzw. modele zapasów (*inventory models*), analizowane m.in. przez: Arrowa, Karlina, Scarfa [3], oraz modele systemów ubezpieczeniowych (tzw. *insurance models*), analizowane m.in. przez Buhlmana [5].

Modele systemów, w których poziom zasobów zmienia się w sposób ciągły obejmują natomiast modele systemów typu „zbiorniki wodne” (*dams models*), które były analizowane m.in. przez Morana [2] i [4], Prabhu [9]), oraz modele systemów typu „transport–zapasy”, zapoczątkowane pracami Gładysza, a później m.in. Króla [7] i Galanca [11] (tzw. „szkoła wrocławska”). Właśnie tego typu systemy będą przedmiotem badań i analiz przedstawionych w niniejszej pracy.

2. Matematyczny model systemów typu „transport–zapasy”

Matematyczny model funkcjonowania systemów „transport–zapasy” można krótko scharakteryzować za pomocą schematu (rys. 1.)



Rys. 1

Systemy tego typu składają się z nadawcy zasobów (oznaczonego „N” na rysunku) oraz z ich odbiorcy (oznaczonego „O”). Odbiorca dla zachowania ciągłości swojej pracy wymaga, aby zasoby były dostarczane do niego ze stałą prędkością ($a > 0$). Ponieważ dostarczanie zasobów do odbiorcy może ulegać losowym awariom, są one więc dostarczane od nadawcy ze stałą prędkością ($c > a > 0$), zaś ich nadmiar z prędkością ($c - a > 0$) jest gromadzony w magazynie („M” na schemacie), który ma skończoną pojemność ($V > 0$) oraz jest zlokalizowany tuż przy odbiorcy. Przeznaczeniem magazynu w tak funkcjonującym systemie jest zapewnienie bezawa-

ryjnej pracy odbiorcy nawet w sytuacji losowej awarii dostaw od nadawcy. W tym przypadku odbiorca może pobierać potrzebne mu zasoby z prędkością ($a > 0$) bezpośrednio z magazynu. Intensywność powstawania losowych awarii w podsystemie transportowym określa parametr ($q_1 > 0$), a intensywność likwidowania takich awarii określa parametr ($q_2 > 0$). Systemy tego typu można zaobserwować w praktyce w wielu gałęziach gospodarki narodowej, takich jak np.: przetwórstwo węgla, ropy, gazu, przetwórstwo spożywcze czy dystrybucja towarów. Szczegółowy opis matematycznego modelu funkcjonowania tego typu systemów można znaleźć w pracach [12] i [21].

Funkcjonowanie systemu „transport–zapasy” opisuje matematycznie następujący układ stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych [21]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} g_1(t, z) + (c - a) \frac{\partial}{\partial z} g_1(t, z) = -q_1(t) g_1(t, z) + q_2(t) g_2(t, z), \\ \frac{\partial}{\partial t} g_2(t, z) - a \frac{\partial}{\partial z} g_2(t, z) = q_1(t) g_1(t, z) - q_2(t) g_2(t, z), \\ \frac{d}{dt} P_n(t) = -q_1(t) P_n(t) + (c - a) g_1(t, V), \\ \frac{d}{dt} P_d(t) = -q_2(t) P_d(t) + a g_2(t, 0), \end{array} \right. \quad (1)$$

gdzie:

$g_1(t, z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa poziomego zapelnienia magazynu w dowolnej chwili czasu t , gdy część NM systemu transportowego jest w stanie pracy,

$g_2(t, z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa poziomego zapelnienia magazynu w dowolnej chwili czasu t , gdy część NM systemu transportowego jest w stanie awarii,

$P_n(t)$ – prawdopodobieństwo nadmiaru zasobów w magazynie,

$P_d(t)$ – prawdopodobieństwo deficytu (niedoboru) zasobów w magazynie.

Powyższy układ równań uwzględnia dynamikę funkcjonowania systemu (zmienność w czasie rozkładu prawdopodobieństwa poziomego zapelnienia magazynu, prawdopodobieństw deficytu oraz nadmiaru, a także intensywności powstawania i likwidowania awarii). Z tych też powodów jest bardzo trudny do rozwiązania analitycznie.

Dotychczas znane są analityczne rozwiązania tego układu równań tylko dla systemu funkcjonującego w ustabilizowanych warunkach (tzw. „wariant stacjonarny” funkcjonowania systemu), w którym podstawowe parametry systemu są niezależne od

czasu: $q_1(t) = q_1$, $q_2(t) = q_2$, $g_1(t, z) = g_1(z)$, $g_2(t, z) = g_2(z)$, $P_d(t) = P_d$, $P_n(t) = P_n$ (zob. np. [16], [17]).

W wyniku przeprowadzonych przeze mnie badań udało się otrzymać dodatkowo analityczne rozwiązania układu (1) dla tzw. wariantu „quasi-dynamicznego” funkcjonowania systemu. Wariant ten charakteryzuje się tzw. „pseudodynamiką”, a więc stałymi w czasie i jednakowymi intensywnościami powstawania i likwidowania awarii: $q_1(t) = q_2(t) = q > 0$, stacjonarnością rozkładów prawdopodobieństwa zapelnienia magazynu zasobami pomiędzy dolną i górną barierą: $g_1(t, z) = g_1(z)$, $g_2(t, z) = g_2(z)$, dla $z \in (0, V)$, ale dopuszcza zmienność w czasie prawdopodobieństw deficytu i nadmiaru zasobów w magazynie: $P_d(t)$, $P_n(t)$.

Otrzymane rozwiązania zależą od wartości tzw. parametru charakterystycznego systemu:

$$k = \frac{q_1 + q_2}{a(c - a)} (v_z - v_w), \quad (2)$$

gdzie:

$$v_w = a \frac{q_1}{q_1 + q_2} - \text{średnia prędkość wybierania zasobów z magazynu,}$$

$$v_z = (c - a) \frac{q_2}{q_1 + q_2} - \text{średnia prędkość zapelniania magazynu zasobami.}$$

Jeżeli ($k = 0$), to system funkcjonuje regularnie (oznacza to, że średnio tyle samo zasobów jest ładowanych do magazynu, co z niego wybieranych – magazyn spełnia wtedy swoją funkcję awaryjnego bufora zasobów). Jeżeli natomiast ($k \neq 0$), to system funkcjonuje nieregularnie (częściej w systemie będą pojawiać się niekorzystne sytuacje deficytu lub nadmiaru zasobów w magazynie). Otrzymane rozwiązania układu (1) dla wariantu „quasi-dynamicznego” są następujące:

Wariant regularny funkcjonowania systemu ($k = 0$)

$$\begin{cases} g_1(z) = \omega, & g_2(z) = \omega, \\ P_d(t) = \mu e^{-qt} + \theta \omega = \mu e^{-qt} + P_{dg}, & P_n(t) = -\mu e^{-qt} + \theta \omega = -\mu e^{-qt} + P_{ng}, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:

P_{dg} – prawdopodobieństwo deficytu dla systemu stacjonarnego, gdy $q = q_1 = q_2 > 0$,

P_{ng} – prawdopodobieństwo nadmiaru dla systemu stacjonarnego, gdy $q = q_1 = q_2 > 0$,

$$\theta = \frac{a}{q_2}, \quad \omega = \frac{1}{2(\theta + V)}, \quad -\theta\omega \leq \mu \leq \theta\omega.$$

Wariant nieregularny funkcjonowania systemu ($k \neq 0$)

$$\begin{cases} g_1(z) = \omega e^{kz}, & g_2(z) = \left(1 + \frac{c-a}{a} \theta k\right) \omega e^{kz}, \\ P_n(t) = -\mu e^{-qt} + \frac{c-a}{a} \theta \omega e^{kV} = -\mu e^{-qt} + P_{ng}, \\ P_d(t) = \mu e^{-qt} + \theta \omega \left(1 + \frac{c-a}{a} \theta k\right) = \mu e^{-qt} + P_{dg}, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

P_{dg} – prawdopodobieństwo deficytu dla systemu stacjonarnego, gdy $q = q_1 = q_2 > 0$,

P_{ng} – prawdopodobieństwo nadmiaru dla systemu stacjonarnego, gdy $q = q_1 = q_2 > 0$,

$$\theta = \frac{a}{q_2}, \quad \omega = \frac{k}{2\left(e^{kV}\left(\frac{c-a}{a} \theta k + 1\right) - 1\right)}, \quad -\theta\omega \left(1 + \frac{c-a}{a} \theta k\right) \leq \mu \leq \frac{c-a}{a} \theta \omega e^{kV}.$$

Występujący we wzorach (3) i (4) parametr μ określa dynamikę zmian prawdopodobieństw nadmiaru i deficytu zasobów w magazynie. Zauważmy, że jeżeli parametr ($\mu = 0$), to otrzymujemy znane wcześniej rozwiązania dla wariantu stacjonarnego systemu, w przypadku takich samych intensywności powstawania i likwidowania awarii: $q = q_1 = q_2 > 0$ (zob. np. [16], [17]).

3. Określenie funkcji strat w systemie „transport–zapasy”

Za miarę efektywności funkcjonowania systemu (w aspekcie ekonomicznym) przyjęłem tzw. „funkcję strat”, uwzględniającą sumaryczne koszty systemu związane z:

- kosztami zwykłego pozyskiwania zasobów od stałego ich dostawcy (nadawca N),
- kosztami magazynowania posiadanych zapasów,
- kosztami awaryjnego pozyskiwania brakujących zasobów od innych kontrahentów zewnętrznych (w sytuacji ich deficytu).

W funkcji strat uwzględniłem ponadto możliwości niwelowania ponoszonych

przez system kosztów, które wynikają z dodatkowych dochodów systemu uzyskiwanych ze sprzedaży nadwyżki posiadanych zasobów magazynowych (w sytuacji ich nadmiaru) kontrahentom zewnętrznym.

Funkcja strat systemu „transport–zapasy” określana jest zatem następująco:

$$\begin{aligned}
 S(t) &= c \int_0^t \xi(\tau) \frac{q_2(\tau)}{q_1(\tau) + q_2(\tau)} d\tau + \int_0^t \left[\int_0^V \psi(\tau, z) dF_\tau(z) \right] d\tau \\
 &\quad + am \int_0^t \xi(\tau) P_d(\tau) d\tau - (c-a)n \int_0^t \xi(\tau) P_n(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t \left[c \xi(\tau) \frac{q_2(\tau)}{q_1(\tau) + q_2(\tau)} + \int_0^V \psi(\tau, z) dF_\tau(z) + am \xi(\tau) P_d(\tau) - (c-a)n \xi(\tau) P_n(\tau) \right] d\tau \quad (5)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$\xi(\tau)$ – jednostkowa cena zakupu zasobów dostarczonych przez nadawcę,

$\psi(\tau, z)$ – funkcja określająca koszty magazynowania zasobów,

$F_\tau(z)$ – dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa poziomu zapełnienia magazynu zasobami pomiędzy dolną i górną jego barierą,

m – parametr określający wzajemną relację cenową pomiędzy jednostkowymi cenami zakupu zasobów od nadawcy i ich awaryjnego zakupu z zewnątrz w sytuacji deficytu,

n – parametr określający wzajemną relację cenową pomiędzy jednostkowymi cenami zakupu zasobów od nadawcy i ich odsprzedaży kontrahentom zewnętrznym w sytuacji nadmiaru.

Szczegółowego wyjaśnienia wymaga funkcja kosztów magazynowania zapasów. W praktyce dla konkretnego systemu funkcję tę najlepiej wyznaczyć metodami ekonometrycznymi, na podstawie obserwacji empirycznych dotyczących kosztów magazynowania zgromadzonych zapasów w zależności od czasu i poziomu zapasów w magazynie. Dla uproszczenia analizy założyłem, że funkcja kosztów magazynowania zapasów jest iloczynem następujących dwóch funkcji:

$$\psi(\tau, z) = \eta(\tau)\varphi(z), \quad (6)$$

gdzie:

$\varphi(z)$ – koszty magazynowania zapasów zależne od poziomu ich nagromadzenia,

$\eta(\tau)$ – zmiana kosztów w czasie (jest to funkcja określająca np. stopień inflacji kosztowej).

Aby określić funkcję kosztów magazynowania w zależności od poziomu zapasów, skorzystałem ze znanego w ekonomii wskaźnika elastyczności dla kosztów magazynowania zapasów:

$$E_z[\varphi(z)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\varphi(z)} \frac{z}{\Delta z} = \frac{z}{\varphi(z)} \frac{d\varphi(z)}{dz}. \quad (7)$$

Przyjąłem ponadto założenie o proporcjonalności tego wskaźnika elastyczności zarówno do poziomu zapasów w magazynie, jak i do kosztów ich magazynowania:

$$E_z[\varphi(z)] = \lambda z \varphi^{\delta-1}(z), \quad (8)$$

gdzie:

- λ – współczynnik proporcjonalności,
- δ – pewien wymierny parametr liczbowy.

Korzystając ze wzorów (7) i (8), możemy stwierdzić, że funkcję kosztów magazynowania w zależności od poziomu zapasów z opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \lambda \varphi^{\delta}(z). \quad (9)$$

Rozwiązując równanie (9), przy odpowiednio dobranych warunkach brzegowych, możemy otrzymać różne analityczne postacie funkcji kosztów magazynowania $\varphi(z)$ (zob. np. [19], [24]).

4. Ocena efektywności funkcjonowania systemu

Ze szczegółowej analizy funkcji strat dla różnych wariantów funkcjonowania systemu można uzyskać wiele wniosków o istotnym znaczeniu praktycznym, które umożliwiają takie sterowanie systemem (poprzez odpowiedni dobór jego parametrów), aby funkcjonował on efektywnie (ponosił relatywnie niskie straty).

W niniejszej pracy przedstawiono tylko niektóre aspekty tego typu analizy, ze szczególnym uwzględnieniem najistotniejszych wniosków praktycznych otrzymanych dla „quasi-dynamicznego” wariantu pracy systemu z uwzględnieniem zmiennych w czasie ekonomicznych uwarunkowań jego funkcjonowania.

Wnikliwa analiza efektywności funkcjonowania systemu może dotyczyć w szczególności następujących problemów:

4.1. Badania wpływu pojemności systemowego magazynu na wielkość ponoszonych strat przez system funkcjonujący w ustabilizowanych warunkach (wariant stacjonarny).

Dzięki tego typu analizie możliwe staje się otrzymanie warunków określających wzajemne relacje pomiędzy wartościami parametrów charakteryzujących ekonomiczne uwarunkowania funkcjonowania systemu (np. koszty magazynowania zapasów, wzajemne relacje cenowe między cenami zakupu i sprzedaży zasobów), które pozwalają w łatwy sposób badać wpływ pojemności magazynu na wielkość strat w systemie.

Możliwe staje się więc określenie np. optymalnych pojemności magazynu (czyli takich, przy których straty systemu są najmniejsze). Pomocne w tym są wzory (rów-

niez numeryczne) określające optymalne pojemności magazynu. Praktyczne zastosowanie otrzymanych wyników jest bardzo ważne, gdyż umożliwia takie określenie pojemności magazynu (na etapie projektowania systemu), aby system funkcjonował możliwie najefektywniej. Ponadto możliwe staje się przeprowadzanie odpowiednich korekt dla systemów już funkcjonujących w praktyce. Problematyka ta jest szczegółowo omawiana w pracach [19], [20].

4.2. Porównania efektywności funkcjonowania systemów, w których koszty magazynowania nie zależą od poziomu zapasów (np. obejmują tylko koszty dzierżawy czy też wynajmu magazynu – tzw. „system podstawowy”) z efektywnością funkcjonowania „ogólnego” systemu, w którym koszty magazynowania są zależne od poziomu zapasów w magazynie.

Analiza porównawcza pozwala na wyciągnięcie interesujących wniosków praktycznych, które umożliwiają takie sterowanie pracą systemu (poprzez odpowiedni wpływ na parametry związane z kosztami magazynowania), aby podnosić efektywność jego funkcjonowania. Zagadnienia te są szczegółowo omawiane w pracach [23] i [24].

4.3. Badania efektywności funkcjonowania systemu „transport–zapasy” w wariacie „quasi-dynamicznym” uwzględniających ponadto zmienne w czasie uwarunkowania ekonomiczne funkcjonowania systemu.

Tego typu analiza jest szczególnie interesująca, gdyż umożliwia badanie efektywności funkcjonowania systemu w dłuższym horyzoncie czasowym. Dzięki niej możliwe staje się uzyskanie warunków dla wartości liczbowych parametrów charakteryzujących dynamikę zmian w czasie prawdopodobieństw deficytu i nadmiaru zasobów magazynowych oraz parametrów określających relacje cenowe. Relacje te umożliwiają łatwe badanie trendu (zmienności w czasie) funkcji strat. Za pomocą otrzymanych zależności możliwe jest np. zbadanie, kiedy system zawsze ponosi straty (w całym rozpatrywanym horyzoncie czasowym) lub kiedy zawsze osiąga korzystny dodatkowy zysk, czy też określenie takich przedziałów w rozpatrywanym horyzoncie czasowym, w których system początkowo ponosi straty, a później przynosi zysk lub odwrotnie.

Praktyczne znaczenie otrzymanych wyników jest bardzo istotne dla funkcjonowania systemu, gdyż umożliwiają one taki dobór parametrów charakteryzujących funkcjonowanie systemu (na etapie jego projektowania), aby system odpowiednio długo funkcjonował jak najefektywniej.

Prezentowane w pracy wnioski praktyczne otrzymano przy założeniu, że rozważany system „transport–zapasy” funkcjonuje w „quasi-dynamicznym” wariacie oraz przy założeniu zmiennych w czasie uwarunkowań ekonomicznych jego funkcjonowania.

Przyjmujemy (z pewnym uproszczeniem), że zmienne w czasie koszty magazynowania zapasów określa funkcja:

$$\psi(t, z) = \varphi(z)(1 + it), \quad (10)$$

gdzie:

$\varphi(z)$ – koszty zależne od poziomu zapasów,

$i \geq 0$ – współczynnik inflacji.

Podobnie przyjmujemy, że zmienną w czasie jednostkową cenę pozyskiwania zasobów od nadawcy wyraża funkcja:

$$\xi(t) = \alpha(1 + it), \quad (11)$$

gdzie:

$i \geq 0$ – współczynnik inflacji,

α – początkowa cena jednostkowa w chwili rozpoczęcia funkcjonowania systemu ($t = 0$).

Wtedy określona wzorem ogólnym (5) funkcja wypadkowych strat systemu przyjmuje postać:

$$S(t) = -\frac{\alpha\mu}{q}(am + n(c-a))e^{-qt} \left(it + 1 + \frac{i}{q} \right) + \frac{1}{2}i\omega t^2 + \omega t + \frac{\alpha\mu}{q}(am + n(c-a)) \left(1 + \frac{i}{q} \right), \quad (12)$$

gdzie:

$w = S_u + \frac{1}{2}c\alpha + am\alpha P_{dg} - n(c-a)\alpha P_{ng}$ – jest pewnym współczynnikiem liczbowym, w którym:

$S_u = \int_0^v \varphi(z) dF_\tau(z)$ – jest funkcją określającą stałe w czasie koszty magazynowania zapasów, $\varphi(z)$ – jest funkcją kosztów magazynowania zapasów zależną od poziomu zapasów, $F_\tau(z)$ – jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa poziomu zapełnienia magazynu pomiędzy dolną oraz górną jego barierą.

Poniżej przedstawione są tylko niektóre z ważniejszych wniosków praktycznych otrzymanych jako wyniki ekonometrycznej analizy efektywności funkcjonowania systemu dla rozpatrywanego wariantu jego funkcjonowania.

Wniosek 4.3.1. *Straty systemu rosną nieograniczenie w czasie:*

• Gdy prawdopodobieństwo deficytu zasobów w systemowym magazynie maleje, natomiast nadmiar rośnie w czasie ($\mu > 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $0 \leq n \leq n_{g1}$, $m > 0$ lub $n > n_{g1}$, $m \geq m_{g1}$. W szczególności, gdy $m = m_{g1}$, wtedy straty systemu rosną tylko do pewnej granicznej wartości S_g określonej zależnością

$$S_g = \frac{\alpha\mu}{q}(am + n(c-a)) \left(1 + \frac{i}{q} \right) \quad (13)$$

• Gdy prawdopodobieństwo deficytu zasobów w systemowym magazynie rośnie, natomiast nadmiaru maleje w czasie ($\mu < 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $0 \leq n \leq n_{g2}$, $m > 0$ lub $n > n_{g2}$, $m \geq m_{g2}$.

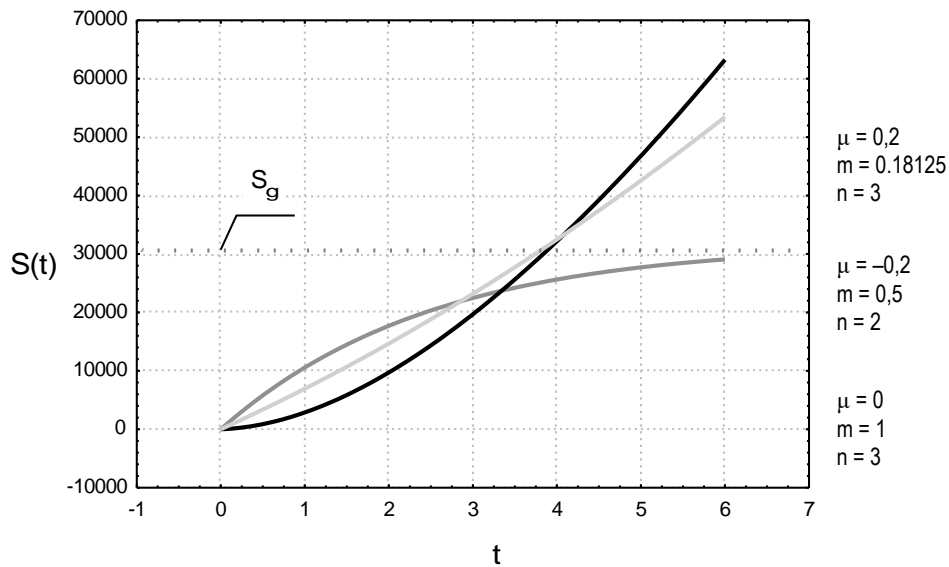
• Gdy prawdopodobieństwa deficytu i nadmiaru zasobów w systemowym magazynie są stałe w czasie ($\mu = 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $0 \leq n \leq n_{g1}$, $m > 0$, lub $n > n_{g1}$, $m > m_{g1}$.

Występujące we wnioskach parametry określające odpowiednie relacje cenowe pomiędzy cenami kupna oraz sprzedaży zasobów określone są następującymi zależnościami:

$$m_{g1} = \frac{(c-a)\alpha P_{ng} n - S_u - \frac{1}{2}c\alpha}{\alpha P_{dg}}, \quad m_{g2} = \frac{(c-a)\alpha(P_{ng} - \mu)n - S_u - \frac{1}{2}c\alpha}{\alpha(P_{dg} + \mu)},$$

$$n_{g1} = \frac{S_u + \frac{1}{2}c\alpha}{(c-a)P_{ng}\alpha}, \quad n_{g2} = \frac{S_u + \frac{1}{2}c\alpha}{(c-a)\alpha(P_{ng} - \mu)}. \quad (14)$$

Z punktu widzenia efektywności funkcjonowania systemu jest to przypadek najbardziej niekorzystny. Zależność funkcji strat od czasu w rozważanym wariantcie funkcjonowania systemu przedstawiono na wykresie (rys. 2).



Rys. 2. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t)$ dla różnych wartości parametru μ , m , n , gdy $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$, $i = 0,12$

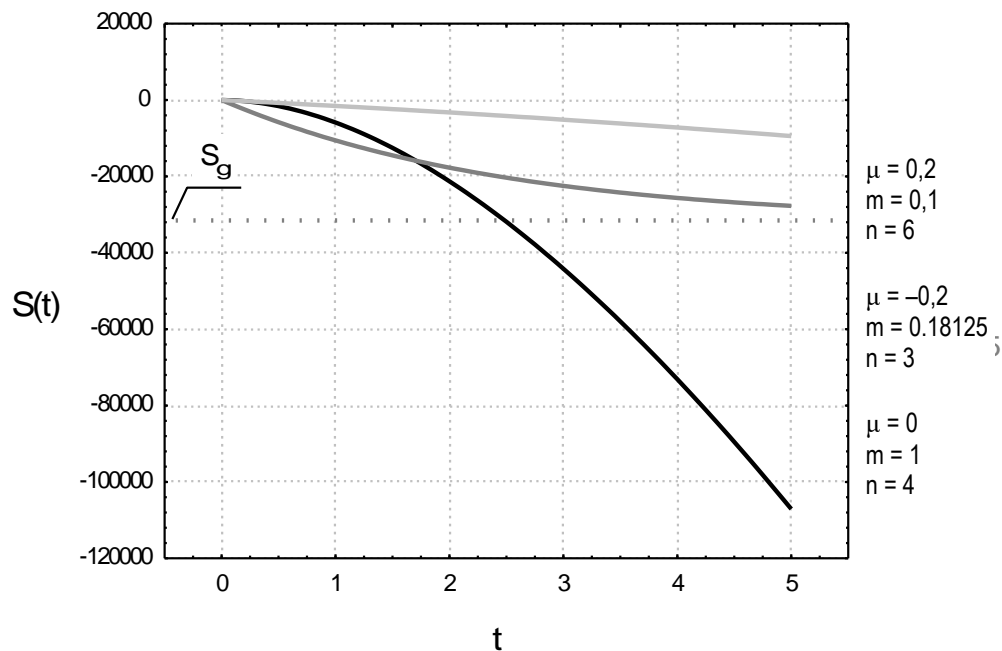
Wniosek 4.3.2. *Zysk systemu rośnie nieograniczenie w czasie:*

- Gdy prawdopodobieństwo deficytu zasobów w systemowym magazynie maleje, natomiast nadmiaru rośnie w czasie ($\mu > 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $n > n_{g2}$, $0 < m \leq m_{g2}$.

- Gdy prawdopodobieństwo deficytu zasobów w systemowym magazynie rośnie, natomiast nadmiaru maleje w czasie ($\mu < 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $n > n_{g1}$, $0 < m \leq m_{g1}$. W szczególności, gdy $m = m_{g1}$, wtedy zysk systemu rośnie do granicznej wartości S_g określonej zależnością (13).

- Gdy prawdopodobieństwa deficytu i nadmiaru zasobów w systemowym magazynie są stałe w czasie ($\mu = 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $n > n_{g1}$, $0 < m < m_{g1}$.

Z punktu widzenia efektywności funkcjonowania systemu jest to przypadek najbardziej korzystny. Zależność funkcji strat od czasu w rozważanym wariantcie funkcjonowania systemu przedstawia wykres (rys. 3).



Rys. 3. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t)$ dla różnych wartości parametru μ, m, n , gdy $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$, $i = 0,12$

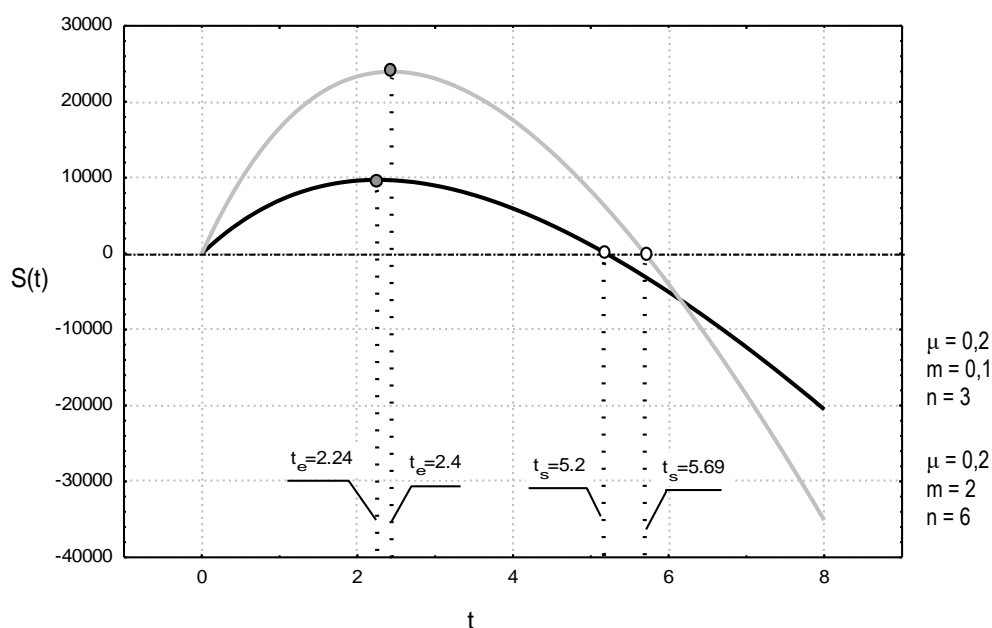
Wniosek 4.3.3. System ponosi początkowo straty w przedziale czasu ($0 < t < t_s$), a następnie osiąga zysk (który rośnie nieograniczenie w czasie):

• Gdy prawdopodobieństwo deficytu maleje a nadmiaru rośnie w czasie ($\mu > 0$), zaś pomiędzy parametrami relacji cenowych zachodzą następujące zależności: $n_{g1} < n \leq n_{g2}$, $0 < m < m_{g1}$ lub $n > n_{g2}$, $m_{g2} < m < m_{g1}$. Funkcja strat jako funkcja trendu w rozważanym przypadku osiąga maksimum. System osiągnie największe straty w chwili $0 < t = t_e < t_s$.

Wartości liczbowe dla chwil czasowych t_s i t_e można wyznaczyć numerycznie z następujących zależności:

$$t_e = -\frac{1}{q} \ln \left(-\frac{w}{\alpha \mu (am + n(c-a))} \right) > 0, \quad S(t_s) = 0. \quad (15)$$

System będzie funkcjonował coraz bardziej efektywnie po upływie czasu t_e , najefektywniej po zaś upływie czasu t_s (zysk systemu). Zależność funkcji strat od czasu w rozważanym wariantcie funkcjonowania systemu przedstawiono na wykresie (rys. 4).



Rys. 4. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t)$ dla różnych wartości parametru μ , m , n , gdy $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$, $i = 0,12$

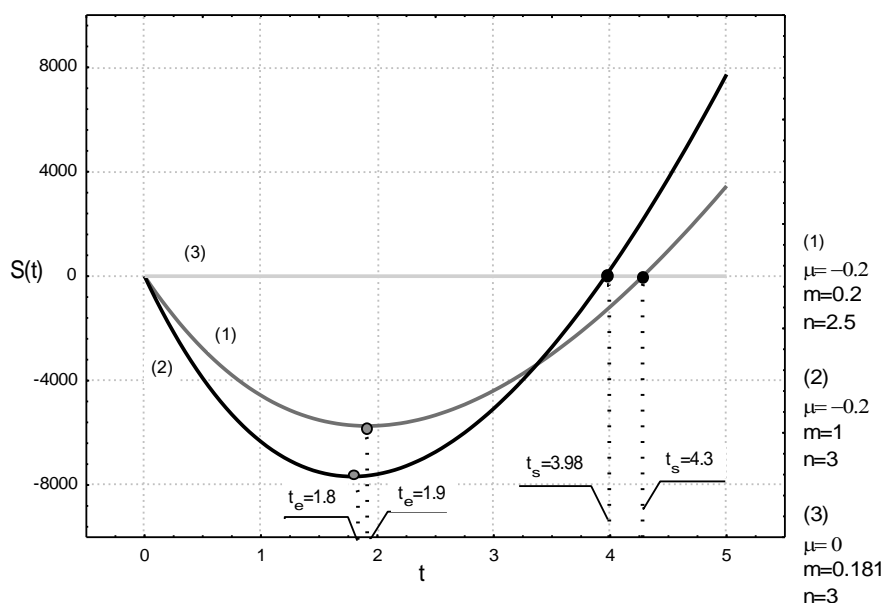
Wniosek 4.3.4. System osiąga zysk w przedziale czasu $0 < t < t_s$, a następnie ponosi straty:

- Gdy prawdopodobieństwo deficytu zasobów w systemowym magazynie rośnie, natomiast nadmiaru maleje w czasie ($\mu < 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $n_{g2} < n \leq n_{g1}$, $0 < m < m_{g2}$ lub $n > n_{g1}$, $m_{g1} < m < m_{g2}$. Funkcja strat w rozważanym przypadku osiąga minimum. Zysk systemu jest największy dla chwili czasu $0 < t = t_e < t_s$, której wartość liczbową możemy wyznaczyć z zależności (15). W przedziale czasu $t > t_s$ system ponosi straty, które rosną nieograniczenie w czasie.

W szczególnym przypadku wypadkowe straty systemu w dowolnej chwili czasu ($t > 0$) wynoszą zero:

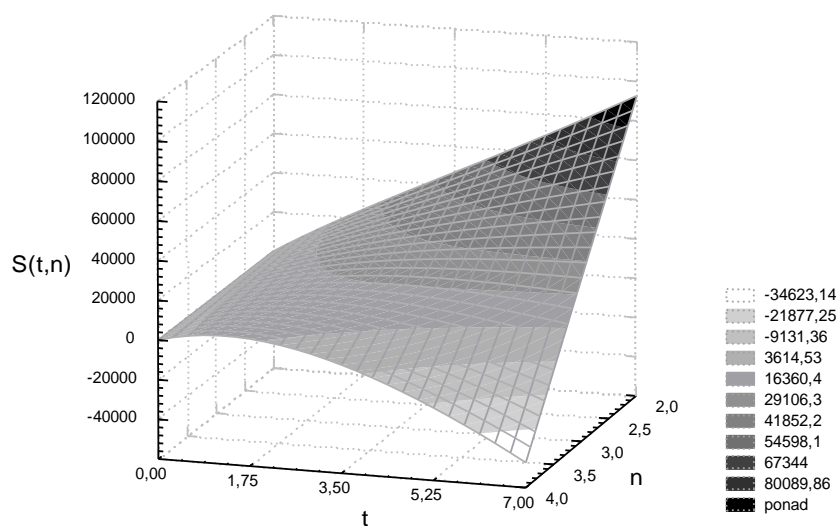
- Gdy system funkcjonuje w ustabilizowanych warunkach (wariant stacjonarny $\mu = 0$), zaś parametry relacji cenowych przyjmują wartości: $n > n_{g1}$, $m = m_{g1}$. Wynika to z faktu, że w każdym jednostkowym przedziale czasu ponoszone przez system straty oraz osiągnięty dodatkowy zysk równoważą się (zob. rys. 5).

System będzie więc funkcjonował najbardziej efektywnie do momentu czasu t_s (zysk systemu). Zależność funkcji strat od czasu w rozważanym wariantcie funkcjonowania systemu przedstawiono na wykresie (rys. 5).

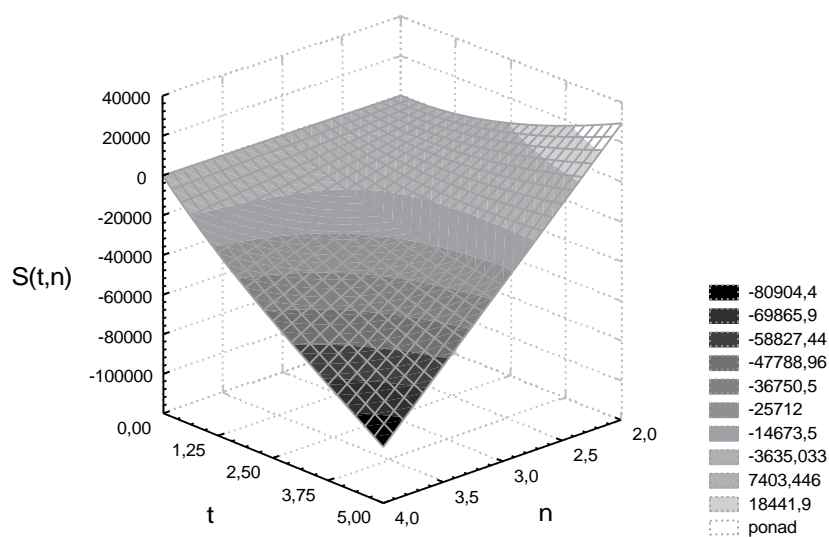


Rys. 5. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t)$ dla różnych wartości parametru μ, m, n , gdy $c = 4000, a = 2000, \alpha = 10, S_u = 2550, q = 0.5, P_{dg} = 0.4, P_{ng} = 0.4, i = 0.12$

Czasowy przebieg strat dla „quasi-dynamicznego” systemu w różnych wariantach jego funkcjonowania ilustrują następujące wykresy przestrzenne.



Rys. 6. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t, n)$
gdy $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$, $i = 0,12$, $m = 0,1$, $\mu = 0,2$



Rys. 7. Wykresy funkcji strat gospodarowania zasobami $S(t, n)$,
gdy $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$, $i = 0,12$, $m = 0,1$, $\mu = -0,2$

4.4. Porównania efektywności funkcjonowania systemu stacjonarnego z systemem „quasi-dynamicznym” funkcjonującym w analogicznych uwarunkowaniach organizacyjno-ekonomicznych.

Funkcja strat systemu stacjonarnego, przy założeniu zmiennych w czasie uwarunkowań ekonomicznych jego funkcjonowania przyjmuje postać:

$$S_{\mu=0}(t) = \frac{1}{2}iwt^2 + wt. \quad (16)$$

Wzajemna relacja pomiędzy stratami w systemie „quasi-dynamicznym” a stratami w analogicznym systemie stacjonarnym jest wyrażona zależnością:

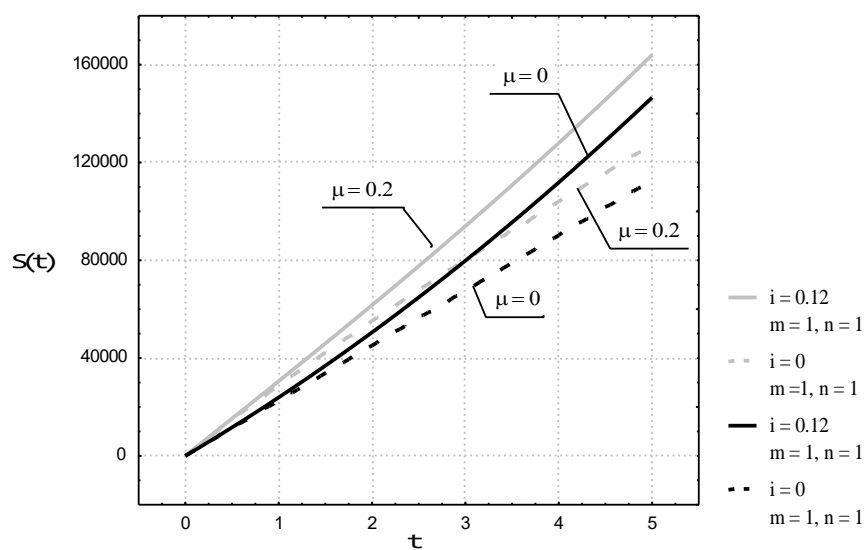
$$S(t) - S_{\mu=0}(t) = \frac{\alpha\mu}{q}(am + n(c - a)) \left[\left(1 + \frac{i}{q}\right) - e^{-qt} \left(it + 1 + \frac{i}{q}\right) \right]. \quad (17)$$

Ponieważ funkcja $H(t) = \left(1 + \frac{i}{q}\right) - e^{-qt} \left(it + 1 + \frac{i}{q}\right)$ jest funkcją rosnącą dla dowolnej chwili czasu $t \geq 0$ oraz $H(0) = 0$, prawdziwa jest więc relacja $H(t) > 0, t > 0$. Wzajemna relacja pomiędzy stratami $S(t)$ oraz $S_{\mu=0}(t)$ zależy zatem tylko od wartości liczbowych parametru μ i charakteryzuje ją następujący wniosek.

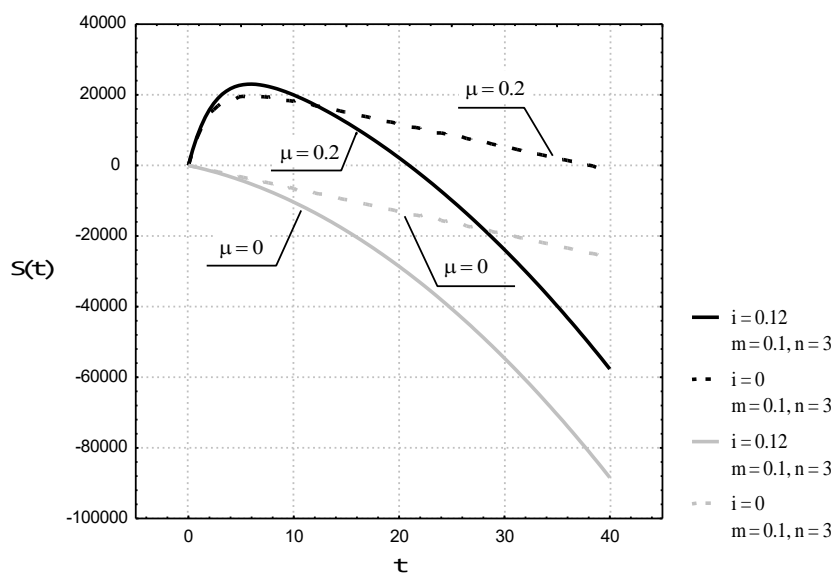
Wniosek 4.4.1

- Jeżeli w systemie „quasi-dynamicznym” wartości parametru $\mu > 0$, to straty takiego systemu zawsze przewyższają analogiczne straty systemu stacjonarnego (niezależnie od wartości pozostałych parametrów charakteryzujących jego funkcjonowanie). Zależność tę ilustrują wykresy (rys. 8 oraz rys. 9).

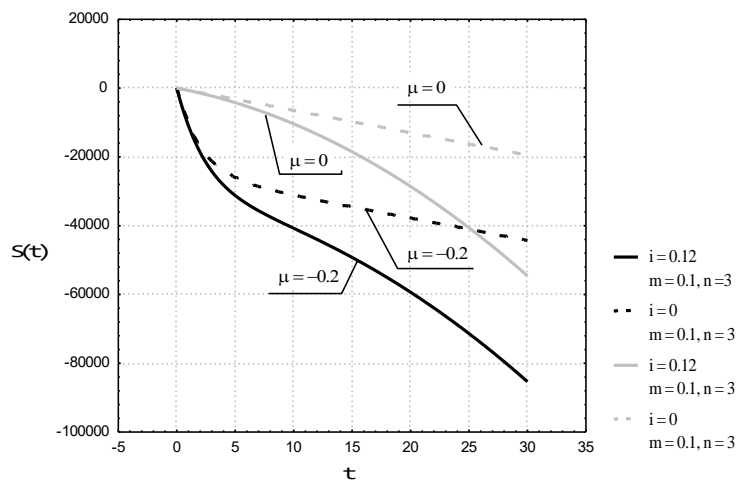
- Jeżeli w systemie „quasi-dynamicznym” wartości parametru $\mu < 0$, to straty takiego systemu nigdy nie przewyższają analogicznych straty systemu stacjonarnego (niezależnie od wartości pozostałych parametrów charakteryzujących jego funkcjonowanie). Zależność tę ilustrują wykresy (rys. 10 oraz rys. 11).



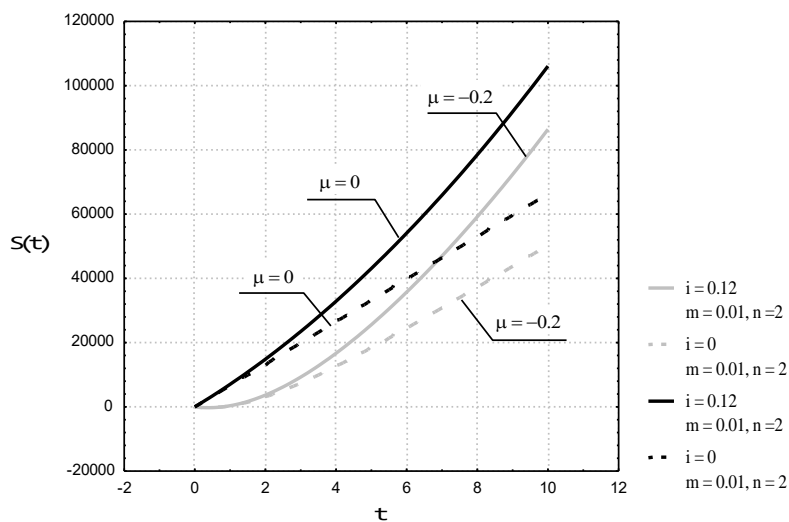
Rys. 8. Wykresy funkcji strat dla różnych wartości parametrów i, μ, m, n , gdy pozostałe parametry charakteryzujące jego funkcjonowanie przyjmują wartości: $c = 4000, a = 2000, \alpha = 10, S_u = 2550, q = 0,5, P_{dg} = 0,4, P_{ng} = 0,4$



Rys. 9. Wykresy funkcji strat dla różnych wartości parametrów i, μ, m, n , gdy pozostałe parametry charakteryzujące jego funkcjonowanie przyjmują wartości: $c = 4000, a = 2000, \alpha = 10, S_u = 2550, q = 0,5, P_{dg} = 0,4, P_{ng} = 0,4$



Rys. 10. Wykresy funkcji strat dla różnych wartości parametrów i , μ , m , n , gdy pozostałe parametry charakteryzujące jego funkcjonowanie przyjmują wartości: $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$



Rys. 11. Wykresy funkcji strat dla różnych wartości parametrów i , μ , m , n , gdy pozostałe parametry charakteryzujące jego funkcjonowanie przyjmują wartości: $c = 4000$, $a = 2000$, $\alpha = 10$, $S_u = 2550$, $q = 0,5$, $P_{dg} = 0,4$, $P_{ng} = 0,4$

O wiele bardziej szczegółową analizę efektywności funkcjonowania rozpatrywanego systemu „transport–zapasy”, a także uzasadnienie wszystkich prezentowanych w publikacji wniosków praktycznych można znaleźć w pracy [24].

Bibliografia

- [1] WILSON R. H., *A scientific routine for stock control*, Harvard Bus., Rev. 13, 1, 194–201, 1934.
- [2] MORAN P. A. P., *A probability theory of dams and storage systems*, Aust. J. Appl. Sci. 5, 116–124, 1954.
- [3] ARROW K., KARLIN S., SCARF H., *Studies in the mathematical theory of inventory and production*, Stanford University Press, Stanford, California 1958.
- [4] MORAN P. A. P., *The theory of storage*, Methuen, London 1959.
- [5] BUHLMANN H., *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag, New York 1970.
- [6] TIJMS H. C., *Analysis of (s, S) inventory models*, Mathematics Centre Tracts No. 40, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1972.
- [7] KRÓL M., *Analiza stochastyczna pewnych systemów gromadzenia zapasów z ciągłym układem transportowym*, [w:] *Systemy informatyczne w górnictwie*, Prace naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej nr 18, 361–374, Wrocław 1975.
- [8] WIJNGAARD J., *The effect of interstage buffer storage on the output of two unreliable production units in series with different production rates*, AIIE Transactions 11, 42–47, 1979.
- [9] PRABHU N. U., *Stochastic storage processes: queues, insurance risk and dams*, Springer-Verlag, 1980.
- [10] CHIKAN A., KELLE P., MESZENA Gy., *A comparison of various classification systems of inventory models*, [in:] *New results in inventory research*, 661–678, Akademiai Kiado, Budapest 1984.
- [11] GALANC T., *Prognozowanie trajektorii systemu cybernetycznego wyznaczonych przez cel sterowania*, Prace naukowe Ośrodka Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej, nr 16, Seria: Monografie 4, 1984.
- [12] KRÓL M., *O pewnym wariancie ekstremalnym prawdopodobieństwa przejścia w wektorowym procesie stochastycznym typu Markowa*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 16, Matematyka i Fizyka z. 2, 171–181, 1995.
- [13] YERALAN S., MUTH E. J., *A general model of production line with intermediate buffer and station breakdown*, IIE Transactions 19, 130–139, 1987.
- [14] SMITH J. M., DASKALAKI S., *Buffer space allocation in automated assembly lines*, Operations Research 1988, 36, 343–358.
- [15] KOSTER M. B. M., *Capacity oriented analysis and design of production systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
- [16] KRÓL M., *Ocena efektywnego wykorzystania magazynu-zbiornika w pewnym systemie gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje 1992, nr 3, s. 33–46.
- [17] KRÓL M., *O wskaźnikach oceny niekorzystnych zjawisk w pracy pewnego systemu gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje 1992, nr 4, s. 55–67.
- [18] BERG M., POSNER M. J. M., ZHAO H., *Production-inventory systems with unreliable machines*, Operations Research 1994, 42, 111–118.
- [19] KRÓL M., PISULA T., *Analiza strat w pewnym systemie transport ciągły-zapasy*, Badania Operacyjne i Decyzje 1995, nr 2, s. 21–30.
- [20] KRÓL M., PISULA T., *Wielkość strat pewnego systemu gospodarki zapasami w warunkach nierównowagi cenowej*, Badania Operacyjne i Decyzje 1995, nr 3, s. 49–58.
- [21] KRÓL M., STARTEK M., *The stochastic analysis of continuous transport system with the storage-reservoir*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 134, Matematyka z. 17, 83–95, 1995.
- [22] IAKOVOU E., IP C. M., KOULAMAS C., *Optimal machining speed and tool inventory policies in machining economic systems*, IIE Transactions 28, 601–606, 1996.
- [23] PISULA T., *Wpływ kosztów utrzymania zbiornika na efektywne funkcjonowanie systemu gospodarki*

zapasami, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 143, Zarządzanie i Marketing z. 1, 61–71, 1996.

- [24] PISULA T., *Analityczna i numeryczna ocena efektywności funkcjonowania pewnego systemu cybernetyczno-ekonomicznego typu „transport–zapasy”*, rozprawa doktorska, Wydział Informatyki i Zarządzania, Politechnika Wroclawska, 1999.

The assessment of efficiency of a cybernetical and economical system of “transport–resources”

In the paper the assessment of efficiency of cybernetical and economical systems of “transport – resources” type with the failure transportation system has been presented. The system consists of single sender of resources and single receiver as well as the store of resources as a buffer enabling the receiver to work continuously even in the standby situation of the lack of resources from the receiver. The so-called function of loss is the measure of efficiency of the systems (in economical aspect). The function deals with a total loss of the system connected with costs of taking over resources from the sender, costs of storing the resources and costs of standby resources from external contractors (in case of deficit). In the function of loss the additional profits of the system have been taken into account which result from the sales of excess of the resources in the store (in the situation of excess) to the external contractors. Based on of the detailed analysis of the function of loss for different variants of system operating it was possible to draw very useful and practical conclusions which enable such a functioning of the system (through the proper choice of its parameters that) it could operate most effectively (suffer a relatively low loss).